Algèbre linéaire - MATH111(f)

Semestre d'automne — 2024-2025

Série 3: Espaces vectoriels et applications linéaires

Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

(O.1) connaître et manipuler des **espaces vectoriels (abstraits)**, ainsi que les propriétés basiques ;

(O.2) connaître et manipuler des **sous-espaces vectoriels** ;

(O.3) déterminer si une famille de vecteurs est **libre** (aussi appelée **linéaire indépendante**) ou **liée** (aussi appelée **linéaire dépendante**) ;

(O.4) déterminer le **sous-espace vectoriel engendré** par une famille de vecteurs ;

(O.5) connaître la définition d'**application linéaire**, ainsi que quelques propriétés basiques.

Nouveau vocabulaire dans cette série

- espace vectoriel
- sous-espace vectoriel engendré
- famille libre (ou linéairement indépendante)
- famille liée (ou linéairement dépendante)
- sous-espace vectoriel
- famille génératrice
- SEL homogène et inhomogène
- application linéaire

Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Exercice 1 (Exemples et non-exemples d'espaces vectoriels)
On remarque que dans les items (a), (b), (d) et (f) on vous demande de n'utiliser que les axiomes d'espace vectoriel pour que vous vous familiarisez avec eux.

(a) En employant les axiomes d'espace vectoriel, montrer que l'ensemble

$$\mathbb{P}_n = \{a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n : a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un espace vectoriel pour la somme et multiplications par scalaires définies en cours.

(b) En employant les axiomes d'espace vectoriel, montrer que l'ensemble $\mathbb{P}$ des polynômes à coefficients réels est un espace vectoriel pour la somme et multiplications par scalaires définies en cours.

(c) Montrer que l'ensemble

$$\left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_2 \neq 0\right\} \subseteq \mathbb{P}_2$$

n'est pas un espace vectoriel pour la somme et multiplications par scalaires de $\mathbb{P}$.

(d) En employant les axiomes d'espace vectoriel, montrer que l'ensemble formé de toutes les suites $(\ldots, y_{-3}, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \ldots)$ avec $y_k \in \mathbb{R}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, muni de l'addition et la multiplication par scalaires données par

$$(\ldots, y_{-1}, y_0, y_1, \ldots) + (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots) = (\ldots, y_{-1} + x_{-1}, y_0 + x_0, y_1 + x_1, \ldots)$$

et

$$\lambda.(\ldots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \ldots) = (\ldots, \lambda.y_{-2}, \lambda.y_{-1}, \lambda.y_0, \lambda.y_1, \lambda.y_2, \ldots),$$

pour $\lambda \in \mathbb{R}$, est un espace vectoriel.

(e) Montrer que les espaces vectoriels défini dans les items (a) et (b) sont des sous-espaces vectoriels de l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muni de l'addition et la multiplication par scalaires définies en cours.

(f) En employant les axiomes d'espace vectoriel, montrer que $\mathsf{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \text{ est continue}\}$ est un espace vectoriel (muni de l'addition et la multiplication par scalaires indiquées dans l'item (e)).

(g) Montrer que $\mathsf{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \text{ est dérivable de dérivée continue}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathsf{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (muni de l'addition et la multiplication par scalaires indiquées dans l'item (e)).

Exercice 2 (Propriétés basiques)
Soit V un espace vectoriel muni des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire. **En n'utilisant QUE les** 8 **axiomes** d'un espace vectoriel, montrer les propriétés suivantes.

(a) L'élément nul $\mathbf{0}_V$ de V est unique.

(b) Étant donné $v \in V$, l'élément opposé $-v$ de $v \in V$ est unique.

(c) $0v = \mathbf{0}_V$ pour tout $v \in V$ et $\mathbf{0}_V = -\mathbf{0}_V$.

(d) $c\mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V$ pour tout $c \in \mathbb{R}$.

(e) $(-1)v = -v$ pour tout $v \in V$.

Exercice 3 (Sous-espaces vectoriels)
Montrer qu'un sous-espace vectoriel W d'un espace vectoriel V, muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire héritées de V, est un espace vectoriel.

Exercice 4 (Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{P}_9$)
Soit $\mathbb{P}_9$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 9. Déterminer si chacun des sous-ensembles suivants de $\mathbb{P}_9$ est un sous-espace vectoriel.

(a) L'ensemble formé des polynômes de la forme at^2, où $a \in \mathbb{R}$ est un réel quelconque.

(b) L'ensemble formé des polynômes de la forme $a + t^2$, où $a \in \mathbb{R}$ est un réel quelconque.

(c) L'ensemble formé des polynômes de la forme $c_1 t^3 + c_2 t^2 + c_3 t + c_4$ où $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{Z}$.

(d) L'ensemble des polynômes p dans $\mathbb{P}_9$ vérifiant $p(0) = 0$.

Exercice 5 (V/F sur des espaces vectoriels et des sous-espaces vectoriels)
Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse. V F

(a) Si V un espace vectoriel et W un sous-espace vectoriel de V, alors on a aussi que V est un sous-espace vectoriel de lui-même et W est un espace vectoriel. ☐ ☐

(b) Si W est un sous-ensemble d'un espace vectoriel V, alors il suffit que $\mathbf{0}_V$ soit dans W pour que W soit un sous-espace vectoriel de V. ☐ ☐

Familles génératrices et indépendance linéaire

Exercice 6 (Combinaisons linéaires de polynômes)
Soient $p_1 = 1 - t$, $p_2 = t^3$ et $p_3 = t^2 - t + 1$ dans $\mathbb{P}_3$. Est-ce que le polynôme $q = t^3 - 2t + 1$ est dans $\mathrm{Vect}\{p_1, p_2, p_3\}$?

Exercice 7 (Combinaisons linéaires dans $\mathbb{R}^4$)
On considère les vecteurs

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En calculant la forme échelonnée d'une matrice, montrer que le vecteur $\mathbf{v}$ est dans le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$.

Exercice 8 (Sous-espaces vectoriels engendrés)
Pour chaque espace vectoriel V ci-dessous, et chaque famille de vecteurs v_1, v_2, v_3, décrire explicitement le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$.

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

(b) $V = \mathbb{P}_3$, $v_1 = t$, $v_2 = t^2$ et $v_3 = t^3$.

Exercice 9 (Indépendance linéaire)

(a) Les colonnes de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 10 & -7 & 1 \\ -5 & -5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

forment-elles une famille liée de vecteurs de $\mathbb{R}^3$?

(b) Les polynômes 1, $1 + t$, $1 + t + t^2$ et $1 + t + t^2 + t^3$ forment-ils une famille liée de $\mathbb{P}_3$?

Exercice 10 (Indépendance linéaire et sous-espaces vectoriels engendrés dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$)
Pour chacun des items suivant, les vecteurs suivants forment-ils une famille libre ? Engendrent-ils $\mathbb{R}^3$ dans les deux premiers items et $\mathbb{R}^2$ dans le dernier item ?

(a) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

(b) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

(c) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Exercice 11 (Matrices, indépendance linéaire et sous-espace vectoriel engendré)
On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 8 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -6 & 2 & 4 \\ 9 & -7 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ -6 & 3 & 0 & -7 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune de ces matrices :

(a) les colonnes forment-elles une famille libre ou liée de $\mathbb{R}^3$?

(b) les colonnes engendrent-elles $\mathbb{R}^3$?

Exercice 12 (V/F sur l'indépendance linéaire et les systèmes homogènes)
Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
(a) Deux vecteurs forment une famille liée si et seulement s'ils se trouvent sur une même droite qui passe par l'origine.	☐	☐
(b) Si un ensemble comporte moins de vecteurs que le nombre de composantes de ceux-ci, alors il est libre.	☐	☐
(c) Un SEL homogène est toujours compatible.	☐	☐
(d) Si $\mathbf{x}$ est une solution non triviale de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, alors aucune composante de $\mathbf{x}$ est nulle.	☐	☐

Applications linéaires

Exercice 13 (Premiers exemples d'applications linéaires)
Déterminer lesquelles des applications suivantes sont linéaires

(a) $T_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donnée par $T_1(x) = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;

(b) $T_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donnée par $T_2(x) = 2x + 3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;

(c) $T_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est donnée par

$$T_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 5x_2 \\ 3x_1 \end{pmatrix}$$

pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Exercice 14 (V/F sur les combinaisons linéaires et les applications linéaires)
Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse. V F

(a) Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ est un ensemble libre de $\mathbb{R}^n$ et $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application linéaire, alors $\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2)\}$ est un ensemble libre de $\mathbb{R}^m$. ☐ ☐

(b) Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ est un ensemble lié de $\mathbb{R}^n$ et $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application linéaire, alors $\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2)\}$ est un ensemble lié de $\mathbb{R}^m$. ☐ ☐

(c) Si $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application linéaire et $T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{0}$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, alors $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. ☐ ☐

(d) Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application et $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, alors T est une application linéaire. ☐ ☐

(e) Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application telle que $T(\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2) = \lambda_1 T(\mathbf{v}_1) + \lambda_2 T(\mathbf{v}_2)$ pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n$, alors T est une application linéaire. ☐ ☐